

оптимальными запасами¹, что было достигнуто применением моделей оптимизации операционных затрат.

6.2. Модели оптимизации операционных затрат

Далее рассматриваются три вида моделей, предназначенных для анализа и оптимизации операционных затрат на предприятиях логистического аутсорсинга, функционирующих в системах поставки материальных ресурсов промышленности региона, а именно: моделирование эффекта операционного рычага, оптимизация операционных затрат методом математического нелинейного программирования, оптимизация размера и точки заказа.

6.2.1. Моделирование эффекта операционного рычага

На величину прибыли предприятия существенно влияют два фактора: эффективность использования ресурсов и структура источников средств. Первый фактор связан с оптимизацией переменных и условно-постоянных² затрат как элементов, влияющих на прибыль от основной деятельности, и характеризуется категорией «операционный рычаг». Вторым фактором связан с категорией «финансовый рычаг» и в данном исследовании не рассматривается. Прибыль от основной деятельности (операционная прибыль или прибыль от реализации) отражается по строке 050 Отчета о прибылях и убытках³ коммерческого предприятия (таблица 6.2).

¹ Расчёт и порядок создания оптимальных запасов, определение связанных с ними точек заказа и расходов на транспортировку ресурсов описаны в пункте 6.2.

² Условно-постоянными считаются затраты, стабильные при варьировании объема поставок в некотором интервале и меняющиеся ступенчато при выходе за пределы этого интервала.

³ Форма № 2, Закон от 21.11.96 № 129-ФЗ «О бухгалтерском учете».

Таблица 6.2. Фрагмент Отчета о прибылях и убытках российского коммерческого предприятия

Наименование показателя	Код строки
Выручка (нетто) от реализации товаров, продукции, работ, услуг	010
Себестоимость реализации товаров, продукции, работ, услуг	020
Валовая прибыль	029
Коммерческие расходы	030
Управленческие расходы	040
Прибыль (убыток) от реализации	050

Расходы предприятия, вычитаемые из выручки от реализации (таблица 6.2, строка 010) для определения операционной прибыли (она же – прибыль от реализации, таблица 6.2, строка 050), принято называть операционными затратами. Операционные затраты объединяют строки 020, 030 и 040 таблицы 6.2 и подразделяются на условно-постоянные и переменные. Для предприятия, поставляющего материальные ресурсы промышленности региона, операционными расходами являются операционные затраты. Очевидно, что названные затраты влияют на операционную прибыль (таблица 6.2, строка 050), а характеристикой этого влияния является эффект операционного рычага. Для его изучения на предприятии логистического аутсорсинга вводится формула:

$$ds = dv + FC + dg, \quad (6.10)$$

где d – расход ресурса со склада в реализацию в натуральном выражении;

s – операционная нетто-выручка на единицу отгруженного со склада ресурса;

v – переменные расходы на единицу ресурса;

FC – условно-постоянные расходы;

g – операционная прибыль на единицу ресурса.

Т.е. ds – выручка от реализации (операционная выручка, таблица 6.2, строка 010), $dv + FC$ – операционные расходы (таблица 6.2, сумма строк 020, 030 и 040, в каждой из которых имеются и условно-постоянные, и переменные расходы), dg – прибыль от реализации (операционная прибыль, таблица 6.2, стр. 050). Тогда, критический расход ресурса d_0 , при котором $dg = 0$:

$$d_0 = FC / (s - v), \quad (6.11)$$

где $(s-v)$ – удельный маржинальный доход,

т.е. d_0 является таким количеством израсходованных единиц ресурса, суммарный маржинальный доход от продажи которого равен сумме условно-постоянных расходов. Следовательно, формула (6.10) представима в виде:

$$d(s-v) = FC + dg, \quad (6.12)$$

из чего следует, что объем реализации d , обеспечивающий прибыль dg определяется так:

$$d = (FC + dg) / (s - v) \quad (6.13)$$

Операционный рычаг L характеризуется соотношением:

$$L = W(dg) / W(d), \quad (6.14)$$

где $W(dg)$ – темп изменения операционной прибыли;

$W(d)$ – темп изменения расхода со склада ресурса, идущего на реализацию.

С учетом выражения (6.12), может быть переписано соотношение (6.14):

$$L = \frac{\Delta(dg)/dg}{\Delta d/d} = \frac{(\Delta d(s-v))/(d(s-v)-FC)}{\Delta d/d} = \frac{d(s-v)}{dg} = \frac{(s-v)}{g} = \lambda \quad (6.15)$$

Из формул (6.12) и (6.15) следует, что операционный рычаг характеризует влияние размера и структуры операционных затрат и расхода ре-

сурса со склада на операционную прибыль предприятия. Очевидно, что чем выше операционный рычаг, тем большую операционную прибыль обеспечивает увеличение объема отгрузок со склада в реализацию. То, что операционная прибыль находится в знаменателе последней дроби выражения (6.15), означает следующее: увеличение операционного рычага за счет повышения отпускной цены или снижения доли переменных затрат конечно и не линейно. В то же время, зависимость между λ и g не обратно пропорциональна, так как увеличение g происходит за счет, во-первых, увеличения s и, во-вторых, снижения v как в абсолютном, так и в относительном выражении. Таким образом, рассматриваемая оптимизационная модель подразумевает одновременное снижение операционных затрат и доли переменных расходов, что окажет двойной эффект на увеличение операционного рычага, как это видно из приведенного ниже расчета (таблицы 6.3 – 6.6). Расчет выполнен на предприятии, поставляющем ресурсы промышленным производствам, и оптимизирующим свои операционные затраты сначала в стохастической устойчивой фазе процесса поставок и поддержания запасов, а затем в условно-детерминированной фазе. Из таблиц 6.3 – 6.6 видно, что для повышения объема продаж предприятие вынуждено было снижать цену реализации.

Таблица 6.3. Расчет эффекта операционного рычага по формуле (6.14)

Период	Расход (тонны)	Цена реализации	Операционная выручка	Операционные затраты	Операционная прибыль	Операционный рычаг
1	381.018	\$ 1 100	\$419 120	\$ 359 283	\$59 837	-----
2	395.041	\$ 1 095	\$432 570	\$ 369 720	\$62 850	1.368
3	416.881	\$ 1 088	\$453 567	\$ 384 474	\$69 093	1.797
4	467.943	\$ 1 072	\$501 635	\$ 416 988	\$84 647	1.838

Таблица 6.4. Расчет операционного рычага по формуле (6.15)
(цена реализации указана в таблице 6.3)

Период	Удельная операционная прибыль	Удельные условно-постоянные затраты	Удельные переменные затраты	Удельные операционные затраты	Операционный рычаг
1	\$157.04	\$ 51	\$ 892	\$ 943	-----
2	\$159.10	\$ 59	\$ 877	\$ 936	1.370
3	\$165.74	\$ 129	\$ 793	\$ 922	1.780
4	\$180.89	\$ 152	\$ 739	\$ 891	1.841

Таблица 6.5. Изменение факторов, влияющих на операционный рычаг

Период	Доля условно-постоянных затрат	Доля переменных затрат	Изменение удельных операционных затрат абсолютное	Изменение удельных операционных затрат относительное
1	5%	95%	-----	-----
2	6%	94%	-\$ 7	-0.74%
3	14%	86%	-\$ 14	-1.50%
4	17%	83%	-\$ 31	-3.36%

Таблица 6.6. Изменение факторов, влияющих на операционный рычаг

Период	Изменение расхода абсолютное	Изменение расхода относительное	Изменение цены реализации абсолютное	Изменение цены реализации относительное
1	-----	-----	-----	-----
2	14.023	3.7%	-\$ 5	-0.45%
3	21.840	5.5%	-\$ 7	-0.64%
4	51.062	12.2%	-\$ 16	-1.47%

Оптимизация размера и структуры операционных затрат позволила предприятию увеличить операционный рычаг. Это повышение, в свою

очередь, привело к росту удельной и общей операционной прибыли, несмотря на некоторое снижение цены реализации, что выразилось в положительной динамике операционной рентабельности.

6.2.2. Оптимизация операционных затрат

методом математического нелинейного программирования

Под рентабельностью обычно понимается отношение прибыли к выручке от реализации – таблица 6.2, п. 6.2.1. Соотношение строк 140/010 упомянутой таблицы принято называть рентабельностью основной деятельности, 050/010 – рентабельностью продукции (ресурса) или операционной рентабельностью. На фокусном предприятии была повышена операционная рентабельность единицы ресурса за счёт оптимизации условно-постоянных и переменных операционных затрат.

Операционная выручка представима в виде:

$$ds = \varphi(v) + \psi(f) + dg, \quad (6.16)$$

где v – переменные расходы;

f – условно-постоянные расходы;

$\varphi(v)$ – некоторая непрерывная функция переменных затрат;

$\psi(f)$ – некоторая ступенчатая функция условно-постоянных затрат;

тогда:

$$dg = ds - \varphi(v) - \psi(f) \quad (6.17)$$

Известна формула годовых логистических расходов для условно-детерминированной фазы процесса поставок и поддержания запасов:

$$TC = kd/q + pd + qh/2 \quad (6.18)$$

и для стохастической устойчивой фазы:

$$TC(q, r) = h \left(\frac{q}{2} + r - y \right) + c_b b_r \frac{d}{q} + k \frac{d}{q}, \quad (6.19)$$

где TC – логистические расходы;

q – размер заказа на закупку ресурса;

d – расход ресурса со склада в течение года;

k – издержки на размещение заказа (условно-постоянны в течение года);

p – цена закупки единицы ресурса на условиях Ex W, FCA, или FOB;

h – издержки на хранение единицы ресурса в течение года (условно-постоянны для каждой единицы ресурса);

r – точка заказа;

c_b – вменённые потери от дефицита на единицу ресурса;

b_r – количество недопоставленных единиц ресурса в течение цикла для данной точки заказа r;

y – расход ресурса в течение срока поставки l (в долях года).

С учётом формулы оптимального размера заказа

$$q^* = \sqrt{2kd/h} \quad (6.20)$$

и после преобразований полные формулы удельной операционной прибыли принимают вид:

$$g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \quad \text{для ус-}$$

ловно-детерминированной фазы и

$$g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - h \left(\frac{r}{d} - 1 \right) - c_b b_r \sqrt{\frac{h}{2kd}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}}$$

для стохастической устойчивой фазы,

где g – удельная операционная прибыль;

s – цена реализации единицы ресурса;

l – срок поставки (задан в долях года);

a_q – доля годовых транспортных расходов на одну поставку ресурса;

j₁ – импортная таможенная пошлина на ввоз данного ресурса;

j₂ – таможенный сбор;

j₃ – расходы по оформлению грузовой таможенной декларации, приходящиеся на одну поставку данного ресурса.

С учётом формулы (6.18) разложение (6.17) для условно-детерминированной фазы процесса поставок и поддержания запасов примет вид:

$$dg = ds - dp - h \frac{q}{2} - k \frac{d}{q} - a_q \frac{d}{q} - (j_1(qp + a_q) + j_2(qp + a_q) + j_3) \left(\frac{d}{q} \right) \quad (6.21)$$

Вывод выражения для операционной прибыли на единицу ресурса для условно-детерминированной фазы таков:

$$g = s - p - h \frac{q}{2d} - k \frac{1}{q} - a_q \frac{1}{q} - (j_1(qp + a_q) + j_2(qp + a_q) + j_3) \left(\frac{1}{q} \right)$$

$$g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - \frac{a_q}{\sqrt{2kd/h}} - (j_1(p\sqrt{2kd/h} + a_q) + j_2(p\sqrt{2kd/h} + a_q) + j_3) \left(\frac{1}{\sqrt{2kd/h}} \right)$$

$$g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \quad (6.22)$$

С учётом формул (6.19) и (6.20) выражение (6.17) для стохастической устойчивой фазы выглядит следующим образом:

$$dg = ds - dp - h \left(\frac{q}{2} + r - y \right) - c_b b_r \frac{d}{q} - k \frac{d}{q} - a_q \frac{d}{q} - (j_1(qp + a_q) + j_2(qp + a_q) + j_3) \left(\frac{d}{q} \right) \quad (6.23)$$

$$dg = ds - dp - h \left(\frac{\sqrt{2kd/h}}{2} + r - dl \right) - c_b b_r \frac{d}{\sqrt{2kd/h}} - k \frac{d}{\sqrt{2kd/h}} - a_q \frac{d}{q} - (j_1(qp + a_q) + j_2(qp + a_q) + j_3) \left(\frac{d}{q} \right)$$

Следовательно, формула операционной прибыли на единицу ресурса для стохастической устойчивой фазы процесса поставок и поддержания запасов такова:

$$g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - h\left(\frac{r}{d} - 1\right) - \frac{c_b b_r}{\sqrt{2kd/h}} - \frac{a_q}{\sqrt{2kd/h}} - \left(j_1 \left(p\sqrt{2kd/h} + a_q\right) + j_2 \left(p\sqrt{2kd/h} + a_q\right) + j_3\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2kd/h}}\right)$$

$$g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - h\left(\frac{r}{d} - 1\right) - c_b b_r \sqrt{\frac{h}{2kd}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}}\right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \quad (6.24)$$

Из формул (6.22) и (6.24) получено аналитическое выражение сокращения удельных операционных затрат при переходе от стохастической устойчивой фазы процесса поставок и поддержания запасов предприятий логистического аутсорсинга, поставляющих материальные ресурсы промышленным производствам, к условно-детерминированной фазе:

$$\sigma = h\left(\frac{r}{d} - 1\right) + c_b b_r \sqrt{\frac{h}{2kd}} \quad (6.25)$$

В сумме (6.25) заложены условно-постоянные (h , k , $c_b b_r$) и переменные (r) затраты, т.е. в условно-детерминированной фазе усиливается эффект операционного рычага. В случае недопустимости дефицита $b_r=0$, но точка заказа r становится значительно выше, чем в ситуации, в которой дефицит допустим.

Представления (6.22) и (6.24) позволяют анализировать зависимость операционной прибыли от расхода ресурса, операционных затрат, закупочной цены, цены продажи. Возможности производителя, пропускная способность транспортной системы, ёмкость рынка накладывают ограничения на расход производственного ресурса:

$$200 \text{ тонн} \leq d \leq 1200 \text{ тонн} \quad (6.26)$$

и цену реализации этого ресурса

$$\$ 950 \leq s \leq \$ 1300 \quad (6.27)$$

На предприятии опытным путём были определены зависимости расхода и цены реализации друг от друга при ограничениях (6.26) и (6.27):

$$d(s) = 2918 \text{ se}^{-0,0082168s} \quad (6.28)$$

$$s(d) = -137,6 \ln d + 1917,7 \quad (6.29)$$

Закупочная цена, установленная фокусному предприятию производителем, представлена ступенчатой функцией:

$$p(d) = \begin{cases} \$760,200m < d \leq 250m \\ \$745,250m < d \leq 300m \\ \$725,300m < d \leq 350m \\ \$705,350m < d \leq 400m \\ \$685,400m < d \leq 450m \\ \$670,450m < d \leq 500m \\ \$650,500m < d \leq 550m \\ \$635,550m < d \leq 600m \\ \$620,600m < d \leq 650m \\ \$605,650m < d \leq 700m \\ \$590,700m < d \leq 750m \\ \$580,750m < d \leq 800m \\ \$570,800m < d \leq 850m \\ \$560,850m < d \leq 900m \\ \$555,900m < d \leq 950m \\ \$550,950m < d \leq 1000m \\ \$545, d > 1000m \end{cases} \quad (6.30)$$

Зависимость (6.30) аппроксимирована следующим образом:

$$p(d) = 3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67 \quad (6.31)$$

После приведения подобных элементов с учётом зависимости (6.31)

выражение (6.22) принимает вид:

$$g(d) = -137,6 \ln d + 1917,7 - (3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67) - d^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2kh} + \sqrt{\frac{h}{2k}} (a_q(1 + j_1 + j_2) + j_3) \right) - (3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67)(j_1 + j_2), \quad (6.32)$$

а выражение (6.24) принимает вид:

$$g(d) = -137,6 \ln d + 1917,7 - (3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67) - d^{-\frac{1}{2}} \sqrt{h} \left(\sqrt{2k} + \sqrt{\frac{1}{2k}} (c_b b_r + a_q(1 + j_1 + j_2) + j_3) \right) - \frac{hr}{d} + hl - (3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67)(j_1 + j_2) \quad (6.33)$$

Первая производная выражения (6.32):

$$g'(d) = -137,6 d^{-1} - (9E - 07d^2 - 0,0006d - 0,2763) + \frac{1}{2} d^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{2kh} + \sqrt{\frac{h}{2k}} (a_q(1 + j_1 + j_2) + j_3) \right) - (9E - 07d^2 - 0,0006d - 0,2763)(j_1 + j_2) \quad (6.34)$$

Первая производная выражения (6.33):

$$g''(d) = 137,6 d^{-2} - (1,8E - 06d - 0,0006) - \frac{3}{4} d^{-\frac{5}{2}} \sqrt{h} \left(\sqrt{2k} + \sqrt{\frac{1}{2k}} (c_b b_r + a_q(1 + j_1 + j_2) + j_3) \right) - \frac{2hr}{d^2} - (1,8E - 06d - 0,0006)(j_1 + j_2) \quad (6.35)$$

Вторая производная выражения (6.32):

$$g''(d) = 137,6 d^{-2} - (1,8E - 06d - 0,0006) - \frac{3}{4} d^{-\frac{5}{2}} \left(\sqrt{2kh} + \sqrt{\frac{h}{2k}} (a_q(1 + j_1 + j_2) + j_3) \right) - (1,8E - 06d - 0,0006)(j_1 + j_2) \quad (6.36)$$

Вторая производная выражения (6.33):

$$g''(d) = 137,6 d^{-2} - (1,8E - 06d - 0,0006) - \frac{3}{4} d^{-\frac{5}{2}} \sqrt{h} \left(\sqrt{2k} + \sqrt{\frac{1}{2k}} (c_b b_r + a_q(1 + j_1 + j_2) + j_3) \right) - \frac{2hr}{d^2} - (1,8E - 06d - 0,0006)(j_1 + j_2) \quad (6.37)$$

Первые производные отрицательны на отрезке (6.26) при следующих значениях удельных затрат и коэффициентов: $k = \$5$, $h = \$80$, $a_q = \$733$, $j_1 = 0.1$, $j_2 = 0.15\%$, $j_3 = \$31$. Вторые производные на отрезке (6.26) положительны, при тех же условиях. Числовые данные этого исследования в условно-детерминированной фазе представлены в таблице 7 Приложения к главе 6, для стохастической устойчивой фазы расчёт аналогичен. Следовательно, функция $g(d)$ стремится к максимуму в точке $g'=0$, значит, точка наибольшей удельной операционной прибыли соответствует наибольшему значению выражения (6.22) или (6.24), при соблюдении условий (6.26), (6.28). Максимизация операционной рентабельности (g/s), выполняется при тех же условиях, но выражения (6.22) и (6.24) из функций цели превратятся в ограничения. Для стохастической модели был выбран уровень поддержки

98% и точка заказа $r = 35$ тонн. Учтены потери от вероятного дефицита $b_r = d * 2\%$ при вменённых потерях от дефицита на тонну $c_b = \$70$. Срок поставки l составляет одну неделю или $1/52$ года. Поскольку целевая функция и два ограничения не линейны, применяется математическое нелинейное программирование (НЛП). Решения задач А – Г получены с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Excel.

А) Задача НЛП максимизации удельной операционной прибыли для условно-детерминированной фазы:

$$\begin{cases} \max g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \\ 950 \leq s \leq 1300 \\ 200 \leq d \leq 1200 \\ s(d) = -137,61 \ln d + 1917,7 \\ p(d) = 3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67 \\ k = 5; h = 80; a_q = 733; j_1 = 10\%; j_2 = 0,15\%; j_3 = 31 \end{cases}$$

Решение: $g = \$292$; $d = 888\text{т}$; $s = \$983$; $q = 10,5\text{т}$.

Б) Задача НЛП максимизации удельной операционной рентабельности для условно-детерминированной фазы:

$$\begin{cases} \max \frac{g}{s} \\ \max g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \\ 950 \leq s \leq 1300 \\ 200 \leq d \leq 1200 \\ s(d) = -137,61 \ln d + 1917,7 \\ p(d) = 3E - 07d^3 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67 \\ k = 5; h = 80; a_q = 733; j_1 = 10\%; j_2 = 0,15\%; j_3 = 31 \end{cases}$$

Решение: $g/s = 0,298$; $g = \$291$; $d = 930\text{т}$; $s = \$977$; $q = 10,8\text{т}$.

В) Задача НЛП максимизации удельной операционной прибыли для стохастической устойчивой фазы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - h \left(\frac{r}{d} - 1 \right) - c_b b_r \sqrt{\frac{h}{2kd}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \\ 950 \leq s \leq 1300 \\ 200 \leq d \leq 1200 \\ s(d) = -137,61 \ln d + 1917,7 \\ p(d) = 3E - 07d^2 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67 \\ k = 5; h = 80; a_q = 733; j_1 = 10\%; j_2 = 0,15\%; j_3 = 31; b_r = d * 2\%; c_b = 70; r = 35; l = 0,019 \end{array} \right.$$

Решение: $g = \$ 174$; $d = 818$ т; $s = \$ 995$; $q = 10$ т

Г) Задача НЛП максимизации удельной операционной рентабельности для стохастической устойчивой фазы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \frac{g}{s} \\ g = s - p - \sqrt{\frac{2kh}{d}} - h \left(\frac{r}{d} - 1 \right) - c_b b_r \sqrt{\frac{h}{2kd}} - a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} - (j_1 + j_2) \left(p + a_q \sqrt{\frac{h}{2kd}} \right) - j_3 \sqrt{\frac{h}{2kd}} \\ 950 \leq s \leq 1300 \\ 200 \leq d \leq 1200 \\ s(d) = -137,61 \ln d + 1917,7 \\ p(d) = 3E - 07d^2 - 0,0003d^2 - 0,2763d + 826,67 \\ k = 5; h = 80; a_q = 733; j_1 = 10\%; j_2 = 0,15\%; j_3 = 31; b_r = d * 2\%; c_b = 70; r = 35; l = 0,019 \end{array} \right.$$

Решение: $g/s = 0,176$; $g = \$ 174$; $d = 851$ т; $s = \$ 989,4$; $q = 10,31$ т.

Сравнение решения задачи А с решением задачи Б и решения задачи В с решением задачи Г попарно показывает, что удельная операционная рентабельность при достижении наибольшей удельной операционной прибыли почти совпадает с максимальной удельной операционной рентабельностью. Для всех четырёх случаев расхождение оптимального размера заказа на закупку не превышает 10% от размера заказа, а расхождение в цене реализации не превышает 2%.

6.2.3. Оптимизация размера и точки заказа предприятием логистического аутсорсинга

В стохастической устойчивой фазе процесса поставок и поддержания запасов материальных ресурсов фокусным предприятием реализация текущего запаса в интервале между поступлениями партий на склад носит вероятностный характер, что отражает нестационарность спроса и стохастичность зависящего от него расходования ресурсов со склада. Размеры поставок, в общем случае, являются случайными величинами с нормальным законом распределения. Момент каждой реализации текущего запаса случаен, но при наличии достаточного страхового запаса дефицит не возникает. При расчёте параметров экономико-математической модели стохастического процесса поставок и поддержания запасов используется формула оптимальной величины заказа. Однако определение величин входящих в неё издержек сопряжено со значительными практическими затруднениями, описанными выше. Данная модель предполагает ряд допущений. Срок поставки l задан. Заказ может быть размещён в любой момент, соответствующий точке заказа g . Издержки размещения заказа k неизменны для каждого заказа в течение года. Издержки хранения единицы ресурса в течение года h постоянны для каждой единицы данного вида ресурса. Расход ресурса со склада d становится непрерывной случайной величиной (СВ), характеризуемой математическим ожиданием¹ $m_d \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ (при условии сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ для

¹ Математическое ожидание случайных величин необходимо для выведения формулы годовых издержек, формул оптимального размера заказа, формулы вероятности превышения расхода в течение периода поставки над запасом в точке заказа. Кроме того, математическое ожидание, наряду со стандартным отклонением, используется в приводимом ниже примере для проверки соответствия распределения случайной величины d нормальному распределению.

любых x^1 , где $f(x)$ – плотность непрерывной СВ), дисперсией $\mu_d \triangleq m[(d - m_d)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx$, стандартным отклонением $\sigma_d \triangleq \sqrt[2]{\mu_d}$. То, что расход ресурса со склада считается непрерывной СВ, подразумевает необходимость введения для его расчёта, кроме упомянутых d, h, k, q , следующих параметров:

l – срок поставки, т.е. время от момента размещения заказа до его доставки на склад, в течение которого расход ресурса не определён;

цикл – интервал между двумя последовательными приходами партий ресурса на склад;

$ohi(t)$ – имеющийся на момент t запас на складе;

r – уровень запаса, при достижении которого размещается следующий заказ (точка заказа);

c_b – вменённый расход на одну заказанную, но не доставленную вовремя предприятию-клиенту единицу ресурса²;

$b(t)$ – объём принятых, но не отгруженных заказов на момент t ;

b_r – СВ – количество недопоставленных единиц ресурса в течение цикла, при условии, что r – точка заказа;

$i(t)$ – нетто-запас на складе на момент t , $i(t) = ohi(t) - b(t)$;

p – вероятность всех возможных событий, связанных с СВ;

¹ В приводимых формулах значения x являются реализациями упомянутых в тексте случайных величин.

² В практике коммерческих предприятий допустима ситуация, когда незначительное количество размещённых клиентами заказов не поставлено или не произведено в срок и претензия или отказ со стороны клиента не возникает. Такого рода обстоятельства, как правило, заранее оговариваются сторонами в контракте. Объём невыполненных заказов всегда мал по сравнению с общим объёмом заказов за указанный в контракте период и по сравнению со среднегодовым уровнем запаса, т.к. часть цикла, в течение которой возникают недопоставки, всегда минимизирована предприятием. Расход c_b – результат потери репутации и необходимости размещения дополнительного заказа.

y – непрерывная СВ – расход ресурса в течение срока поставки l и имеющая плотность распределения $f(y)$, математическое ожидание $m_y = l * m_d$, дисперсию $\mu_y = l * \mu_d$, стандартное отклонение $\sigma_y = \sqrt{l} * \sigma_d$ (значения расхода в разные моменты времени полагаются величинами независимыми). Предполагается, что обе СВ имеют нормальное¹ распределение, т.е. плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (6.38)$$

Средства Excel позволяют выполнить проверку этого предположения.

Очевидно, высокий уровень r снизит риск отсутствия ресурса на складе в нужный момент, но станет причиной больших расходов по поддержанию складского запаса. Следовательно, встаёт вопрос о нахождении такой величины r , при которой ожидаемые операционные расходы и риск нехватки ресурса будут сбалансированы.

Формула оптимального размера заказа (6.39) и условие равновесия для точки заказа (6.40) в условиях стохастического спроса общеизвестны. Их алгебраические выводы приведены профессором Уинстоном в [5]:

$$q^* = \sqrt{2km_d/h} \quad (6.39)$$

$$p(y \geq r^*) = hq^*/m_dc_b \quad (6.40)$$

Определение точки заказа и неснижаемого запаса в условиях неопределённого спроса рассмотрены на примере пяти ресурсов категории «А». На первом этапе моделирования предполагается, что дефицит не приводит к потере сбыта. В таблице 6.7 представлены данные о ежегодном расходе в

¹ Нормальное распределение широко применяется при решении прикладных задач. Это связано с тем, что в реальности многие исследуемые случайные величины являются следствием различных случайных событий. В частности, при достаточно общих предположениях, сумма большого числа независимых случайных величин удовлетворительно описывается нормальным законом.

тоннах этих ресурсов со склада предприятия за девять¹ лет: с 1999 г. по 2007 г. Срок поставки l составляет одну неделю. Расходы k на размещение одного заказа оценены в \$5, годовые затраты на хранение одной тонны h≈\$80.

Таблица 6.7. Ежегодный сбыт пяти ресурсов категории «А»

Год	Расход со склада d (тонны)				
	Ресурс 1	Ресурс 2	Ресурс 3	Ресурс 4	Ресурс 5
1999	324	98	96	148	74
2000	381	121	84	131	106
2001	395	134	115	167	145
2002	417	156	117	174	174
2003	468	192	137	206	211
2004	423	213	123	231	161
2005	437	219	154	257	113
2006	682	237	169	263	85
2007	418	61	150	162	223

Вменённые потери s_b на дефицит единицы ресурса l считаются равными \$70. Определяются оптимальный размер заказа, точка заказа, не снижаемый запас и вероятность отсутствия ресурса на складе к концу срока поставки. С помощью соответствующих функций Excel (подробное описание этих функций и их использования дано ниже) определяются основные параметры набора значений расхода ресурса l со склада. Среднее значение, которое здесь принимается как математическое ожидание $m_d = 438,39$ (функция СРЗНАЧ), стандартное отклонение $\sigma_d = 99,89$ (функция СТАНДОТКЛОН), максимальное значение $d_{max} = 682,48$ (функция МАКС), минимальное значение $d_{min} = 324,00$ (функция МИН). Далее выявляется характер частотного распределения случайной величины d, как показано в таблице 6.8. Для этого данные разбиваются на условные интервалы (колонка 2 таблицы 6.8). С помощью функции ЧАСТОТА

¹ Выборка из девяти значений считается достаточной для практической оценки характера и параметров распределения.

(={ЧАСТОТА(массив_данных; массив_интервалов)_}) определяется частота реализаций случайной величины в пределах каждого интервала (колонка 3 таблицы 6.8). Посредством формул в ячейках рабочего листа Excel определяются процентная частота и кумулятивная процентная частота (колонки 4 и 5 таблицы 6.8). С помощью функции НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (НОРМРАСП (x; среднее; стандартное_откл; интегральная¹)) проверяется соответствие характера распределения случайной величины нормальному (колонка «Теоретическая частота» таблицы 6.8). Для расчёта теоретических процентных частот в качестве параметров выбираются фактическое среднее значение и стандартное отклонение случайной величины.

Таблица 6.8. Проверка соответствия частотного распределения случайной величины «расход» d нормальному распределению для ресурса l

Данные	Интервал	Частота	Частота (%)	Кумулятивная частота (%)	Теоретическая частота
1	2	3	4	5	6
438.39	200	0	0%	0%	1%
99.89	400	3	33%	33%	35%
682.48	600	5	56%	89%	95%
324.00	800	1	11%	100%	100%
		9	100%		

Сравнение колонок 5 и 6 таблицы 6.8 показывает, что для практических целей распределение случайной величины d (годового расхода артикула l) считается нормальным. Оптимальный размер заказа вычисляется по формуле (6.39):

$$q^* = \sqrt{2km_d/h} = \sqrt{2 * 5 * 438,39/80} \approx 7,40 \text{ т.}$$

Определяются характеристики СВ y – расхода в течение периода поставки. Период поставки равен неделе, величина y имеет нормальное рас-

¹ Если аргумент «интегральная» равен 1 (или «истина») функция возвращает значения для интегральной функции распределения; если аргумент «интегральная» равен 0 (или «ложь»), функция возвращает плотность распределения.

пределение, математическое ожидание $m_y = 1 * m_d = m_d / 52 = 438,39 / 52 \approx 8,43$ и стандартное отклонение $\sigma_y = \sqrt{1} * \sigma_d = 99,89 / \sqrt{52} \approx 13,85$. С помощью равенства (6.40) определяется вероятность того, что расход в течение периода поставки превысит соответствующий точке заказа складской запас:

$$p(y \geq r^*) = hq^* / m_d c_b = (80 * 7,40) / (438,39 * 70) \approx 0,02$$

Для определения такой величины r , которая с вероятностью 98% будет соответствовать расходу за период поставки, используется функция Excel НОРМОБР (НОРМОБР (вероятность; среднее; стандартное_откл)). Ввод данных (НОРМОБР (0,98; 8,43; 13,85)) позволяет рассчитать $r \approx 37$ тонн, а неснижаемый запас определяется как округлённая до целых тонн разность $r - m_y = 37 - 8 = 29$ т. Таким же способом проверен характер частотного распределения для ресурсов 2 – 5 (таблицы 1-4 Приложения к главе б) и определены точка заказа и неснижаемый запас всех пяти ресурсов (табл. 6.5).

Таблица 6.9. Расчёт точки заказа и неснижаемого запаса для пяти ресурсов категории «А», при условии, что дефицит не приводит к потере продаж

Параметр	Артикул 1	Артикул 2	Артикул 3	Артикул 4	Артикул 5
m_d (тонны)	438	159	127	193	141
k	\$ 5	\$ 5	\$ 5	\$ 5	\$ 5
h	\$ 80	\$ 80	\$ 80	\$ 80	\$ 80
q^* (тонны)	7.40	4.46	3.99	4.92	4.20
d/q^*	59	36	32	39	34
c_b	\$ 70	\$ 70	\$ 70	\$ 70	\$ 70
σ_d (тонны)	99.89	60.34	27.85	48.05	52.25
l (доля года)	0.019231	0.019231	0.019231	0.019231	0.019231
σ_l (тонны)	0	0	0	0	0
m_y (тонны)	8.430626	3.059017	2.446857	3.717083	2.712733
σ_y (тонны)	13.85277	8.368207	3.862394	6.663131	7.245446
$p(y \geq r^*)$	0.019298	0.032037	0.035821	0.029063	0.034021

Продолжение табл. 6.9

Параметр	Артикул 1	Артикул 2	Артикул 3	Артикул 4	Артикул 5
r^* (тонны)	37	19	9	16	16
SS^1 (тонны)	29	16	7	12	13

Определение точки заказа, при возникновении потери продаж из-за дефицита, является следующим этапом построения стохастической модели поставок. Используются те же обозначения, что и в предыдущем расчёте, но вместо c_b возникают вменённые потери на не реализованную единицу ресурса c_{is} . Последние включают в себя потерю прибыли от непроданной единицы, возможные штрафные санкции по контракту, ущерб для деловой репутации. Для определения точки заказа профессор Уинстон применяет маржинальный анализ [5], размер заказа рассчитывается по формуле (6.39), а выражение (6.40) принимает вид:

$$p(y \geq r^*) = hq^* / (hq^* + m_d c_{is}) \quad (6.41)$$

В этом случае подразумевается меньшая вероятность потери продаж, а значит более высокая точка заказа и больший неснижаемый запас, чем в случае допустимости дефицита (что подтверждается сопоставлением данных таблиц 6.9 и 6.10). Для всех пяти наименований сделан расчёт точки заказа. Алгоритм расчёта такой же, как для первого этапа, но с учётом выражения (6.41) и вменённых потерь от не реализованной единицы ресурса $c_{is} \approx \$350/\text{тонну}$. Порядок использования функций Excel для этого расчёта представлен ниже, а результаты сведены в таблицу 6.10.

Таблица 6.10. Расчёт точки заказа и неснижаемого запаса для пяти артикулов группы «А» для случая потери сбыта из-за дефицита

Параметр	Артикул 1	Артикул 2	Артикул 3	Артикул 4	Артикул 5
m_d (тонны)	438	159	127	193	141
k	\$ 5	\$ 5	\$ 5	\$ 5	\$ 5

¹ SS – неснижаемый запас.

Продолжение табл. 6.10

Параметр	Артикул 1	Артикул 2	Артикул 3	Артикул 4	Артикул 5
h	\$ 80	\$ 80	\$ 80	\$ 80	\$ 80
q* (тонны)	7.40	4.46	3.99	4.92	4.20
d/q*	59	36	32	39	34
c _{is}	\$ 350	\$ 350	\$ 350	\$ 350	\$ 350
σ _d	99.89	60.34	27.85	48.05	52.25
l (доля года)	0.019231	0.019231	0.019231	0.019231	0.019231
σ _l (тонны)	0	0	0	0	0
m _y (тонны)	8.430626	3.059017	2.446857	3.717083	2.712733
σ _y (тонны)	13.85277	8.368207	3.862394	6.663131	7.245446
p (y ≥ r*)	0.003845	0.006367	0.007113	0.005779	0.006758
r* (тонны)	45	24	12	21	21
SS (тонны)	37	21	10	17	18

Рассмотренный на первых двух этапах построения стохастической модели подход предполагает поддержание запасов материальных ресурсов, которые почти полностью удовлетворяют существующий спрос. Для предприятия-поставщика производственных ресурсов этот подход требует довольно точной оценки вменённых маржинальных потерь c_b и c_{is} . В ситуациях, когда такую оценку провести сложно, оказывается действенным установление заданного уровня поддержки, что является третьим этапом создания стохастической модели. В качестве меры надёжности ресурсного обеспечения на фокусном предприятии выбирается процент вовремя удовлетворённого спроса. Для этой меры вводится обозначение SL, остальные обозначения приведены выше. Для расчёта ожидаемого количества недостат в течение цикла вводится нормальная функция потерь $NL(r_{st})$, где r_{st} – стандартизованная точка заказа. Ее алгебраический и экономический смысл объяснен во многих монографиях по исследованию операций, поэтому в данной работе не разъясняется. Следует лишь заметить, что применение нормальной функции потерь соответствует известному из теории вероятностей правилу «k сигм», которое гласит, что нормально

распределённая случайная величина $X \sim N(m; \sigma^2)$ с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему математическому ожиданию:

$$P\{|X-m| \leq k\sigma\} = \begin{cases} 0,6827, k=1 \\ 0,9545, k=2 \\ 0,9973, k=3 \end{cases} \quad (6.42)$$

Вывод уравнения для расчёта точки заказа через нормальную функцию потерь также широко известен, поэтому здесь приводится лишь само это уравнение, необходимое в дальнейших расчетах:

$$NL\left(\frac{r-m_y}{\sigma_y}\right) = \frac{q(1-SL)}{\sigma_y} \quad (6.43)$$

Из выражения (6.43) видно, что аргумент нормальной функции потерь есть стандартизованная точка заказа для заданного уровня поддержки. Правая часть уравнения (6.11) и соответствующая ей точка заказа r вычисляются с помощью функций NORMDIST и NORMSDIST пакета Microsoft Excel, как показано ниже. Результаты расчёта для пяти ресурсов категории «А» сведены в таблицу 6.7. Расчёт сделан с учётом уровня поддержки 98%, т.к. именно этот уровень считается приемлемым для запасов группы «А» на предприятиях логистического аутсорсинга. Так же определяется точка заказа и неснижаемый запас для любого уровня поддержки. Таблица 5 Приложения к главе 6 содержит значения точки заказа и неснижаемого запаса ресурса 1 для уровней поддержки от 75% до 99%. Из таблицы видно, что чем уровень поддержки выше, тем большее увеличение точки заказа и неснижаемого запаса требуется для перехода к нему. Переход от 75-процентного уровня поддержки к 99-процентному увеличивает точку заказа на 100%, а неснижаемый запас на 200%.

В стохастической устойчивой фазе процесса поставок и поддержания запасов на фокусном предприятии повысилась эффективность системы поставок по сравнению со стохастической неустойчивой фазой, были созданы предпосылки для перехода в условно-детерминированную фазу.

Таблица 6.11. Расчёт точки заказа и неснижаемого запаса для пяти ресурсов группы «А» при установлении уровня поддержки 98%

Параметр	Ресурс 1	Ресурс 2	Ресурс 3	Ресурс 4	Ресурс 5
SL	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
k	\$ 5	\$ 5	\$ 5	\$ 5	\$ 5
h	\$ 80	\$ 80	\$ 80	\$ 80	\$ 80
m _d (тонны)	438	159	127	193	141
q* (тонны)	7.40	4.46	3.99	4.92	4.20
m _d /q*	59.22	35.67	31.90	39.32	33.59
σ _d (тонны)	99.89	60.34	27.85	48.05	52.25
l (доля года)	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192
σ _l (тонны)	0	0	0	0	0
m _v (тонны)	8.43	3.06	2.45	3.72	2.71
σ _v (тонны)	13.85	8.37	3.86	6.66	7.25
r* (тонны)	34.93	19.08	8.82	15.62	16.35
r _{st}	1.913	1.914	1.650	1.787	1.882
NL(r _{st})	0.010687	0.010657	0.020651	0.014755	0.011591
SS (тонны)	26.50011	16.01727	6.37182	11.90605	13.63365
m(B _r) _{st}	0.010688	0.010657	0.020651	0.014754	0.011591
Проверка	5.83E-07	2.97E-07	8.1E-07	7.7E-07	0.000000

В качестве критерия такого перехода для предприятий-поставщиков промышленных производств применяется коэффициент расхождения VC. Для его вычисления определяется средний расход ресурса со склада за период $\bar{d} = 1/n \sum_{i=1}^n d_i$, где n – число наблюдений в периоде. Затем высчитывается расхождение $\delta\bar{d} = 1/n \sum_{i=1}^n d_i^2 - \bar{d}^2$. Коэффициент расхождения определяется как относительное расхождение $VC = \delta\bar{d}/\bar{d}^2$. Расход ресурса принято считать условно-детерминированным при $VC < 0.2$. Основополагающее различие между стохастической устойчивой фазой и условно детерминированной фазой состоит в том, что в последнем случае расход ресурса перестаёт быть случайной величиной. На рассматриваемом предприятии, во втором полугодии 2008 года процесс поставок и поддер-

жания запасов стал отражаться детерминированной моделью. Ее допущения общеизвестны: размещение заказов носит регулярный характер, спрос на ресурс детерминирован, заказ может быть размещён в любое время, издержки на размещение заказа постоянны и не зависят от размера заказа, не возникает дефицит, заказ прибывает в распоряжение предприятия в момент его размещения, т.е. влияние срока поставки не учитывается¹, расчётный период – один год. Оптимальный размер заказа вычисляется по формуле Уилсона/Харриса [2], вывод которой приведен во многих учебниках по исследованию операций. Пример применения этой формулы на фокусном предприятии – расчёт оптимального размера заказа для ресурса 1. Предполагаемая реализация в 2008 году составит d= 404 тонны производственного ресурса артикула 1. Размещение одного заказа обходится предприятию в k= \$ 5. Закупочная цена одной тонны: p= \$ 700. Годовые затраты на хранение одной тонны: h= \$ 80. С зарубежным поставщиком заключен системный контракт. Тогда оптимальный размер заказа: $q^* = \sqrt{(2 * \$5 * 404)/\$80} \approx 7m$. Количество таких заказов в течение года составит $d/q^* = 404m/7m \approx 57$. Интервал заказа (в долях года): $t^* = q^*/d = 7m/404m \approx 0.02$, т.е. около одной недели. Годовые операционные затраты предприятия логистического аутсорсинга: $TC = kd/q + pd + qh/2 = \283684 . Порядок выполнения этих расчётов

¹ Влияние времени поставки устраняется тем дополнением, что в качестве точки размещения заказа вместо $I=0$ выбирается рассчитанный положительный уровень запаса. С учётом того, что время поставки не равно нулю, возникают два варианта. Первый: в течение срока поставки расход товарного наименования со склада не превышает $q^* I^*D \leq q^*$. В таком случае момент размещения нового заказа возникает тогда, когда остаток данного ресурса на складе становится равным I^*D . Второй: расход со склада в течение срока поставки превышает q^* , т.е. $I^*D > q^*$. Тогда очередной заказ должен быть размещён по достижении размера запаса, равного остатку от частного $(I^*D) / q^*$.

средствами Microsoft Excel описан в пункте 6.3. По такому же алгоритму выполнен расчёт основных параметров детерминированной модели поставок, отражавшей во втором полугодии 2008 года процесс поставок и поддержания запасов на фокусном предприятии для остальных четырёх артикулов категории «А» (таблица 6.12).

В данном контексте следует учесть транспортный фактор. Для оптимизации расходов на транспортировку и таможенное оформление, как правило, в одно или несколько транспортных средств загружается одновременно несколько разных ресурсов. Поскольку каждый из ресурсов имеет оптимальный размер и оптимальную точку заказа, встаёт вопрос о способе их синхронизации. Ответ на этот вопрос дал Р. Раунди в 1985 г. в статье «98% Effective Integer Rate Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems» [5], доказав, что оптимальный интервал заказа лежит на отрезке $[t^*/\sqrt{2}; t^*\sqrt{2}]$, где t^* – оптимальный интервал заказа, а выбор интервала заказа $t=2^m$ или $t=2^{m+1}$ (где m – целое положительное число) увеличивает годовые логистические расходы не более, чем на 6%. В таблице 6 Приложения к главе 6 приведены исходные данные для расчёта оптимального размера заказа всех пяти рассматриваемых ресурсов, а в таблицу 6.12 сведены результаты расчёта основных параметров детерминированной модели во втором полугодии 2008 года.

Таблица 6.12. Основные параметры детерминированной модели поставок пяти ресурсов категории «А» во втором полугодии 2008 года

Артикул	1	2	3	4	5
Оптимальный размер заказа, q^* (тонны)	7.11	3.38	6.18	4.78	4.13
Оптимальный интервал заказа, t^* (дни)	6.42	13.51	7.38	9.55	11.05

Продолжение табл. 6.12

Артикул	1	2	3	4	5
Синхронизированный интервал заказа, t'	4 дня	8 дней	4 дня	8 дней	8 дней
Годовые операционные затраты (\$)	283 684	66 614	226 861	144 690	109 446

Из таблицы 6.12 видно, что ресурсам присвоены интервалы поставки для обеспечения синхронной загрузки в транспортные средства, которые одновременно отправляются, проходят таможенное оформление, прибывают на склад предприятия, т.е. одновременные стадии обработки грузов эффективно организованы. В данной модели сгруппированы артикулы первый с третьим, второй с четвертым и пятым. Технология расчётов посредством инструментария Excel описана ниже.

6.3. Экономико-математические модели как часть алгоритмического обеспечения экономических информационных систем

На предприятиях-поставщиках ресурсов для промышленности региона распространена система «1С: Предприятие 8.Х». Сформированные в этой системе отчёты о движении материальных ресурсов в интегрированной системе поставок промышленным производствам конвертируются в рабочие листы Microsoft Excel для выполнения анализа, как показано на схеме (рис. 6.3)¹:

¹ Верхняя часть схемы до пунктирной линии разработана М.Г. Радченко [6].